

Esercizi - Calcolo integrale

Esercizio 1. Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni razionali.

1. $\int \frac{x}{1+3x} dx$

5. $\int \frac{1}{x^2+x+5} dx$

9. $\int \frac{x}{x^2+3x+4} dx$

2. $\int \frac{3x}{2x^2-x-1} dx$

6. $\int \frac{x^3-2x}{(x+3)^2} dx$

10. $\int \frac{x-1}{4x^2+3} dx$

3. $\int \frac{x^3-5x+1}{x^2-4} dx$

7. $\int \frac{x^3-5x^2+2}{x^2+x-6} dx$

11. $\int \frac{3x+1}{x^2+3x-10} dx$

4. $\int \frac{x}{2x^2+x+1} dx$

8. $\int \frac{x-3}{x^2+4x+4} dx$

12. $\int \frac{x}{9x^2+6x+1} dx$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a) $\int x e^{2x} dx$

d) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx$

g) $\int x \log^2 x dx$

b) $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

e) $\int \sin^3 x dx$

h) $\int e^{2x} \sin x dx$

c) $\int \frac{\log^4 x}{x} dx$

f) $\int \frac{1}{4x^2+3} dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+x} dx$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali definiti:

1. $\int_0^4 \frac{1}{(3x+2)^2} dx$

3. $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$

5. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^3} dx$

2. $\int_0^\pi \sin^2(3x) dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

6. $\int_0^2 |1-x| dx$

Esercizio 4. Utilizzando il cambio di variabile $t = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x-1}{x^4 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} dx$$

Esercizi di Esame

Esercizio 5. a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx$

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{e^x}{1 + 2e^{-2x}} dx$

Esercizio 6.

a) Calcolare l'integrale indefinito: $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$

Esercizio 7.

a) Determinare tutte le primitive della funzione $f(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1}$

b) Calcolare l'integrale $\int_0^1 \arctan(2x + 1) dx$

Esercizio 8.

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x}{3x^2 - 5x - 2} dx$

b) Calcolare l'integrale definito $\int_1^e \frac{\log x - 1}{x(3 \log^2 x - 5 \log x - 2)} dx$

Esercizio 9.

a) Determinare tutte le primitive della funzione $f(x) = \frac{2 - x}{x^2 + x + 1}$

b) Calcolare l'integrale $\int_0^\pi \frac{\cos x (2 - \sin x)}{\sin^2 x + \sin x + 1} dx$

Esercizio 10.

1. Determinare tutte le primitive della funzione $f(x) := \frac{1 - x^2}{1 + 3x^2}$.

2. Utilizzando il punto precedente e la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$, calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} dx$$

Risultati

Esercizio 1. Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni razionali.

1. $\int \frac{x}{1+3x} dx = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \log |1+3x| + C.$
2. $\int \frac{3x}{2x^2-x-1} dx = \log |1-x| + \frac{1}{2} \log |2x+1| + C$
3. $\int \frac{x^3-5x+1}{x^2-4} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \log |2-x| - \frac{3}{4} \log |x+2| + C$
4. $\int \frac{x}{2x^2+x+1} dx = \frac{1}{4} \log (2x^2+x+1) - \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right) + C$
5. $\int \frac{1}{x^2+x+5} = \frac{2 \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}} \right)}{\sqrt{19}} + C$
6. $\int \frac{x^3-2x}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{21}{x+3} + 25 \log |x+3| + C$
7. $\int \frac{x^3-5x^2+2}{x^2+x-6} dx = \frac{x^2}{2} - 6x - 2 \log |2-x| + 14 \log |x+3| + C$
8. $\int \frac{x-3}{x^2+4x+4} dx = \log |x+2| + \frac{5}{x+2} + C$
9. $\int \frac{x}{x^2+3x+4} dx = \frac{1}{2} \log (x^2+3x+4) - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}} \right) + C$
10. $\int \frac{x-1}{4x^2+3} dx = \frac{1}{8} \log (4x^2+3) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C$
11. $\int \frac{3x+1}{x^2+3x-10} dx = \log |2-x| + 2 \log |x+5| + C$
12. $\int \frac{x}{9x^2+6x+1} dx = \frac{1}{9(3x+1)} + \frac{1}{9} \log |3x+1| + C$

Esercizio 2.

- a) $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$
- b) $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$
- c) $\int \frac{\log^4 x}{x} dx = \frac{\log^5(x)}{5} + C$
- d) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \arctan^3 x + C$
- e) $\int \sin^3 x dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$
- f) $\int \frac{1}{4x^2+3} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C$
- g) $\int x \log^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{x^2}{4} + C$

$$\text{h)} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{2}{5} e^x \sin x - \frac{1}{5} e^x \cos x + C$$

$$\text{i)} \int \frac{\sqrt{x}}{2+x} \, dx = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Esercizio 3.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^4 \frac{1}{(3x+2)^2} \, dx = \frac{1}{7} & 3. \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = -2\pi & 5. \int_1^2 \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^3} \, dx = \frac{e^2}{4} \\ 2. \int_0^\pi \sin^2(3x) \, dx = \frac{\pi}{2} & 4. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = 1 & 6. \int_0^2 |1-x| \, dx = 1. \end{array}$$

Esercizio 4.

$$\int \frac{x-1}{x^4 \sqrt{1+\frac{1}{x}}} \, dx = 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} \frac{1-3x+6x^2}{5x^2} + C.$$

Esercizio 5. a) $\int \frac{x^2}{x^2+2} \, dx = x - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

b) $\int \frac{e^x}{1+2e^{-2x}} \, dx = e^x - \sqrt{2} \arctan \frac{e^x}{\sqrt{2}} + C$

Esercizio 6.

a) $\int \frac{x}{x^2-3x+2} \, dx = -\log|1-x| + 2\log|2-x| + C$

b) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{x^4-3x^2+2} \, dx = \frac{1}{2} \log \frac{9}{8}$

Esercizio 7.

a) $-\frac{1}{2} \arctan(1+2x) + \frac{1}{4} \log(2x^2+2x+1) + C$

b) $\int_0^1 \arctan(2x+1) \, dx = -\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} \arctan 3 - \frac{1}{4} \log 5.$

Esercizio 8.

a) $\int \frac{x}{3x^2-5x-2} \, dx = \frac{2}{7} \log|2-x| + \frac{1}{21} \log|1+3x| + C$

b) $\int_1^e \frac{\log x - 1}{x(3\log^2 x - 5\log x - 2)} \, dx = \frac{5}{21} \log 2$

Esercizio 9.

$$\text{a) } -\frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{5 \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

$$\text{b) } \int_0^\pi \frac{\cos x (2 - \sin x)}{\sin^2 x + \sin x + 1} dx = 0$$

Esercizio 10.

$$1. \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x) - \frac{x}{3} + C.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} dx = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$$